

Barem clasa a IX-a

(OLM 2026-etapa locală)

Subiectul 1 (25 puncte)

a) Prin calcul $S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$ (10p)

b) Observăm că $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] = 1 \cdot 3$, $[\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}] = 2 \cdot 5$,

$$[\sqrt{9}] + [\sqrt{10}] + \dots + [\sqrt{15}] = 3 \cdot 7, \dots, [\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2+1}] + \dots + [\sqrt{n^2+2n}] = n \cdot (2n+1) \dots (8p)$$

$$\text{Atunci } S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + n(2n+1) = \sum_{k=1}^n k(2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \dots (2p)$$

$$= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} \dots (5p)$$

Subiectul 2 (25 puncte)

a) $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD}$ (1)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} \quad (2) \dots (5p)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow x = 1 \text{ și } y = 2 \dots (5p)$$

b) Explicităm vectorii:

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \dots (3p)$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \dots (3p)$$

$$\overrightarrow{FP} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \dots (3p)$$

$$z\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{FP} = \vec{0} \Rightarrow (2z+10)\overrightarrow{AB} + \frac{3z+15}{2}\overrightarrow{CD} = \vec{0} \dots (3p)$$

$$2z+10=0 \text{ și } \frac{3z+15}{2}=0 \Rightarrow z=-5 \in \mathbb{R} \setminus \{-7\} \dots (3p)$$

Subiectul 3 (20 puncte)

$$\text{Scrie } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 2xy \dots (3p)$$

$$\text{Din inegalitatea mediilor rezultă că } 4xy \leq (x+y)^2 = 4, \text{ de unde } xy = a \in [0,1] \dots (6p)$$

Inegalitatea pe care trebuie să o demonstrăm devine:

$$2 \geq a^2(4-2a) \text{ sau echivalent } 0 \leq a^3 - 2a^2 + 1 = (1-a)(1+a-a^2) \dots (8p)$$

$$\text{Finalizare} \dots (3p)$$

Subiectul 4 (20 puncte)

Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a + b + c \geq 3 \Rightarrow 0 < \frac{2}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2}{a+b+c} \right\rfloor = 0$(3p)

Egalitatea dată devine $\left\lfloor \frac{a^2}{b+c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a+c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{a+b} \right\rfloor = 0$

Cum fiecare termen este un număr natural, rezultă că $\left\lfloor \frac{a^2}{b+c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b^2}{a+c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c^2}{a+b} \right\rfloor = 0$(3p)

De aici observăm că $0 < \frac{a^2}{b+c} < 1, 0 < \frac{b^2}{a+c} < 1, 0 < \frac{c^2}{a+b} < 1$(3p)

Obținem relațiile $a^2 < b + c, b^2 < a + c, c^2 < a + b$,.....(2p)

Adunând relațiile obținem $a^2 + b^2 + c^2 < 2a + 2b + 2c$, care este echivalent cu.....(1p)

$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 < 3$(2p)

Cum $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, singurele valori posibile sunt 1 sau 2.....(2p)

Dacă unul dintre numere este 2, de exemplu $a = 2$, atunci inegalitatea $a^2 < b + c$ devine $4 < b + c$. Dar valorile maxime pentru b și c sunt 2, deci obținem $4 < 4$, ceea ce este fals. Același lucru se întâmplă dacă $b = 2$ sau $c = 2$(2p)

De unde rezultă $a = b = c = 1$ (2p)